

Résonances multiples dans les systèmes mécaniques couplés

Pierre-Olivier Mattei

CNRS

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
31 chemin Joseph Aiguier 13402 Marseille Cedex 20
mattei@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé :

Cette communication traite du couplage vibroacoustique en fluide lourd. Lorsque la densité du fluide est faible, il est bien connu que le calcul des modes de résonance par une méthode de perturbation conduit à des résultats très précis. Une extension de ces méthodes au cas des fluides lourds a été proposée récemment et a conduit à des résultats étonnants d'efficacité. Au cours des investigations numériques qui ont été conduites, il a été observé un phénomène de résonances multiples pour lequel un même mode vibratoire peut posséder plusieurs fréquences de résonance.

Afin d'expliquer ce phénomène, on s'intéresse à l'exemple élémentaire d'une membrane rectangulaire couplée à un fluide lourd. Pour une densité du fluide élevée on montre, en utilisant des résultats classiques de la théorie des fonctions entières, qu'une résonance simple de cette membrane se transforme en une infinité de résonances. Des exemples numériques sont donnés.

Abstract :

This communication deals with vibroacoustic under heavy fluid-loading conditions. When the density of the fluid is low, it is well-known that the calculation of the resonance modes by a perturbation method leads to very precise results. An extension of these methods to the heavy loading was proposed recently and has led to surprisingly simple and efficient analytical results. During numerical investigations which were led, it was observed a phenomenon of multiple resonances for which the same mode can have several resonances frequencies.

In order to explain this phenomena, one is interested in the simple example of a rectangular membrane loaded by a heavy fluid. For a very high density of the fluid one shows, by using classical results of the theory of entire functions, that a simple resonance of this membrane is transformed into an infinity of resonances. Numerical examples are given.

Mots-clefs :

Analyse spectrale ; vibroacoustique ; fonctions entières

1 Introduction

Décrire précisément le couplage fluide structure rend les méthodes de calcul numérique totalement inefficaces. Ceci est dû au fait que l'opérateur qui décrit le couplage est non seulement dépendant de la fréquence mais aussi non local. En général, les méthodes numériques de calcul de structures *in vacuo* conduisent à des systèmes linéaires relativement simples à résoudre. Lorsque le couplage est pris en compte, la taille des systèmes linéaires augmente, les matrices deviennent pleines et dépendantes de la fréquence ; la résolution numérique de ces systèmes devient alors problématique. Il est souhaitable de disposer de techniques qui permettent de contourner ces difficultés.

Parmi les nombreuses solutions étudiées, les méthodes asymptotiques basées sur des développements en série de perturbation d'un petit paramètre sont particulièrement attractives. Une méthode a priori valide pour un couplage faible (par exemple pour une structure en métal au contact d'air), consiste à introduire un petit paramètre défini comme le rapport entre la

masse volumique du fluide et masse surfacique de la structure. Par développement en série de perturbation (Nayfeh (1993)), il a été montré (Filippi et al. (2001)) que le calcul du spectre de l'opérateur de la structure couplée par un développement en série de perturbation, limitée à l'ordre un, du spectre de l'opérateur de la structure *in vacuo* conduit à une méthode de résolution efficace tant du point de vue du temps de calcul que de la justesse des résultats.

L'étape suivante a consisté (Mattei (2007)) à étendre les méthodes de perturbation lorsque le paramètre de perturbation devient très grand (ce qui correspond à une structure très légère ou très fine en contact avec un fluide de forte densité). Et, au cours des investigations qui ont été conduites, il a été observé un phénomène de résonance multiple pour lequel un mode de résonance peut posséder plusieurs fréquences de résonance. Le spectre de l'opérateur ne peut plus être décrit par son spectre discret basé sur une suite dénombrable de couples mode de résonance/fréquence de résonance. Ce phénomène, typiquement non linéaire, a un lien très étroit avec le concept de mode non-linéaire en fréquence (Dazel and Lamarque (2004)) pour lequel la non linéarité dépend des paramètres temporels, comme ceux qui apparaissent dans les milieux poreux. Cette non linéarité fréquentielle est liée à des problèmes qui s'écrivent sous la forme $\mathcal{M}(\omega)u = f$ où u est l'inconnue, f le terme source et $\mathcal{M}(\omega)$ est un opérateur qui dépend non linéairement de la fréquence comme il en apparaît dans les milieux poreux ou dans le cas de la vibroacoustique pour lequel le couplage dépend non linéairement de la fréquence. Bien évidemment, lorsque le couplage est faible (par exemple dans l'air), ce phénomène n'est pas mis en évidence.

Dans cet article on montre sur un exemple simple que ce phénomène est, semble-t-il, une propriété générale des structures couplées. Pour ce faire, on présente dans le paragraphe 2 une méthode de calcul approchée du spectre d'une structure vibrante couplée à un fluide de densité quelconque basée sur une méthode de perturbation d'ordre élevé, puis sur un exemple numérique de validation de la méthode (par comparaison avec une résolution numérique des équations exactes), on met en évidence ce phénomène de résonance multiple. On présente dans le paragraphe 3 la mise en évidence théorique du phénomène sur l'exemple académique de la membrane rectangulaire couplée à un fluide dont la densité est prise arbitrairement grande. On montre, en utilisant des résultats classiques sur la répartition des zéros des fonctions entières, que tout mode vibratoire de la membrane comporte asymptotiquement une infinité de résonance. Le paragraphe 4 présente les conclusions et les extensions possibles du travail.

2 Méthode de perturbation d'ordre élevé

Afin de clarifier la démarche, on repart du calcul par perturbation des modes $\tilde{U}_m(M, \omega)$ et valeurs propres $\tilde{\Lambda}_m(\omega) = \rho_p h \tilde{\omega}_m^2(\omega)$ d'une structure mince qui occupe un domaine Σ de l'espace et décrite par son opérateur différentiel \mathcal{O} (opérateur des plaques, des coques, ...) couplée à un fluide parfait. $\tilde{U}_m(M, \omega)$ et $\tilde{\Lambda}_m(\omega)$ sont les solutions non nulles de l'équation intégrodifférentielle

$$\mathcal{O}\tilde{U}_m(M, \omega) - \tilde{\Lambda}_m(\omega) \left(\tilde{U}_m(M, \omega) - \epsilon \int_{\Sigma} \tilde{U}_m(M', \omega) G(M; M', \omega) dM' \right) = 0$$

où $\epsilon = \rho_f / \rho_p h$ est un petit paramètre pour une structure en métal au contact d'air et $G(M; M', \omega)$ est la fonction de Green du problème de Neumann extérieur à la surface Σ pour l'équation de Helmholtz. Si on définit $\beta_\omega(U, V) = \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} U(M') G(M; M', \omega) V^*(M) dM dM'$ comme l'impédance de rayonnement, la formulation faible du problème : trouver $\tilde{U}_m(M, \omega)$ et $\tilde{\Lambda}_m(\omega)$ tels que pour tout V qui satisfait les conditions aux limites, on ait

$$a(\tilde{U}_m, V^*) - \tilde{\Lambda}_m(\omega) \left(\langle \tilde{U}_m, V^* \rangle - \epsilon \beta_\omega(\tilde{U}_m, V^*) \right) = 0,$$

permet d'écrire le développement en série de perturbation

$$\begin{aligned}\tilde{U}_m(M) &= \tilde{U}_m^{(0)}(M) + \epsilon \tilde{U}_m^{(1)}(M) + \dots + \epsilon^s \tilde{U}_m^{(s)}(M) + \dots \\ \tilde{\Lambda}_m &= \tilde{\Lambda}_m^{(0)} + \epsilon \tilde{\Lambda}_m^{(1)} + \dots + \epsilon^s \tilde{\Lambda}_m^{(s)} + \dots\end{aligned}$$

où $\tilde{U}_m^{(0)}(M)$ et $\tilde{\Lambda}_m^{(0)}$ sont les modes et valeurs propres de la structure dans le vide. On montre facilement que, à l'ordre 1 en ϵ

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_m^{(1)}(\omega) &= \tilde{\Lambda}_m^{(0)} \beta_\omega^{mm}, \\ \tilde{U}_m^{(1)}(M)(\omega) &= \sum_{n \neq m} \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)} - \tilde{\Lambda}_n^{(0)}} \beta_\omega^{mn} \tilde{U}_n^{(0)}(M),\end{aligned}$$

où $\beta_\omega^{mn} = \beta_\omega(\tilde{U}_m^{(0)}, \tilde{U}_n^{(0)*})$ et à l'ordre 2 en ϵ

$$\tilde{\Lambda}_m^{(2)} = \tilde{\Lambda}_m^{(0)} \left((\beta_\omega^{mm})^2 + \sum_{p \neq m} \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)} - \tilde{\Lambda}_p^{(0)}} \beta_\omega^{mp} \right),$$

et ainsi de suite pour les ordres plus élevés. On montre ensuite que (Mattei (2007)) en regroupant les termes des divers développements, on obtient une relation $\tilde{\Lambda}_m(\omega) \approx \tilde{\Lambda}_m^{(0)} / (1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})$ dont on peut montrer qu'elle reste valide pour $\epsilon \gg 1$. Le calcul des modes et pulsations propres ne pose pas de difficulté particulière et on a pour ω fixé la relation $\tilde{\omega}_m^2(\omega) = \tilde{\omega}_m^{(0)2} / (1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})$.

Par contre, si on s'intéresse aux modes $\hat{U}_m(M)$ et pulsations de résonance (ou modes et pulsations propres généralisés) $\hat{\Lambda}_m = \rho_p h \hat{\omega}_m^2$ solutions de l'équation

$$a(\hat{U}_m, V^*) - \rho_p h \hat{\omega}_m^2 (\langle \hat{U}_m, V^* \rangle - \epsilon \beta_{\hat{\omega}_m}(\hat{U}_m, V^*)) = 0,$$

que l'on calcule par perturbation, on arrive à la résolution de l'équation

$$\hat{\omega}_m^2 = \tilde{\omega}_m^2(\hat{\omega}_m) \Leftrightarrow \hat{\omega}_m^2 = \tilde{\omega}_m^{(0)2} / (1 - \epsilon \beta_{\hat{\omega}_m}^{mm}) \Leftrightarrow \hat{\omega}_m^2 (1 - \epsilon \beta_{\hat{\omega}_m}^{mm}) = \tilde{\omega}_m^{(0)2}.$$

Ce calcul est beaucoup plus difficile car il nécessite la recherche des zéros complexes d'une fonction non convexe. Lorsque on cherche à résoudre cette équation, plusieurs cas se distinguent :

Pour $\epsilon = 0 \Rightarrow \hat{\omega}_m^2 = \tilde{\omega}_m^2 = \tilde{\omega}_m^{(0)2}$ on a une résonance (et son opposée).

Pour $\epsilon \ll 1 \Rightarrow \hat{\omega}_m^2 = \tilde{\omega}_m^{(0)2} \left(1 + \epsilon \beta_{\tilde{\omega}_m^{(0)}}^{mm} \right)$ on a une résonance avec effets de masse et d'amortissement ajoutés (ainsi que l'opposée de sa conjuguée $-\hat{\omega}_m^*$).

Pour $\epsilon = \mathcal{O}(1) \Rightarrow \hat{\omega}_m^2 (1 - \epsilon \beta_{\hat{\omega}_m}^{mm}) = \tilde{\omega}_m^{(0)2}$ on a une ou plusieurs résonances (ainsi que les opposées des conjuguées correspondantes).

Par exemple, pour une plaque en acier de $1\text{m} \times 0,7\text{m}$ encastrée bafflée dans l'eau, on compare figure 1 les fréquences de résonance calculées en résolvant les équation exactes par une méthode d'Éléments Finis de Frontière à celles calculées par perturbation lorsque l'épaisseur de la plaque varie¹. À une épaisseur donnée correspondent deux fréquences de résonance situées soit sur une branche "supérieure" (courbes discontinues) soit sur une branche "inférieure" (courbes continues). Ces résultats montrent, non seulement qu'un mode de résonance donné peut avoir plusieurs fréquences de résonances, mais aussi que le comportement de ce mode peut être décrit très précisément par la méthode de perturbation d'ordre élevé. Il est à noter que le calcul de la solution exacte présenté figure 1 a nécessité environ 1 mois de calcul sur une machine parallèle à 4 processeurs alors que le calcul de la solution approchée n'a nécessité sur la même machine que quelques minutes.

¹Pour une plaque élastique dans le vide, la partie réelle de la fréquence dépend linéairement de l'épaisseur tandis que la partie imaginaire est nulle. D'autre part, comme $\tilde{\omega}_m^{(0)} \propto h$ et $\epsilon \propto 1/h$, la fonction $\omega^2 - \tilde{\omega}_m^{(0)2} / (1 - \epsilon \beta_\omega^{mm}) \approx \omega^2$ pour $h \rightarrow 0$

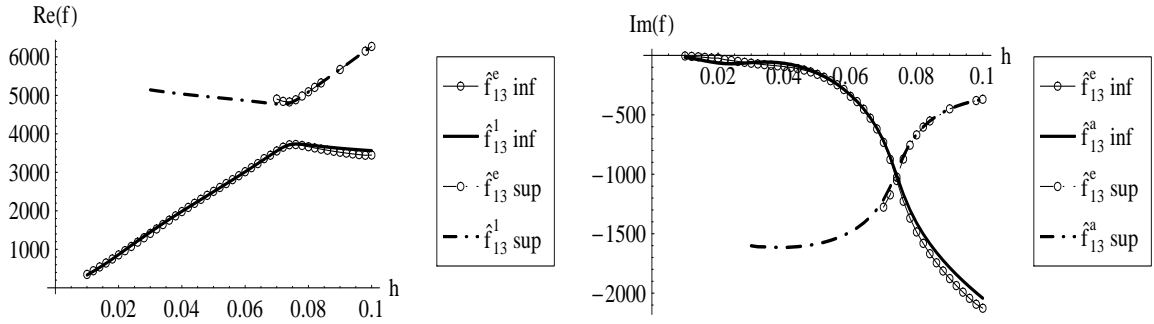


FIG. 1 – Comparaison de la variation en fonction de l'épaisseur des parties réelle (gauche) et imaginaire (droite) de la fréquence du mode de résonance ($m = 1, n = 3$) d'une plaque en acier au contact d'eau calculées par solution exacte (courbes fines accentuées par des cercles) et par développement asymptotique (courbes à traits épais).

3 Résonance multiples

Étudions ce qui se passe lorsque ϵ devient très grand. On utilise ici encore l'expression analytique des fréquences de résonances donnée par la méthode de perturbation d'ordre élevé. On cherche toujours les pulsations $\hat{\omega}_m$ telles que $\hat{\omega}_m^2(1 - \epsilon\beta_{\hat{\omega}_m}^{mm}) = \tilde{\omega}_m^{(0)2}$. Il est évident que pour $\epsilon \rightarrow \infty$, on est amené à chercher les valeurs de $\hat{\omega}_m$ telles que $\beta_{\hat{\omega}_m}^{mm} = 0$.

Tout le problème est centré sur l'existence et le dénombrement de ces racines. Et, au cas où il existerait une infinité de solutions $\hat{\omega}_m$ si ces résonances multiples correspondent au phénomène observé sur la plaque. Afin de mieux comprendre ce phénomène, on s'est intéressé au cas élémentaire de la membrane rectangulaire (de dimensions $a \times b$) bafflée qui vibre sur une résonance masse-ressort d'amplitude constante unitaire $\tilde{U}_m^{(0)}(x, y) = 1$. On a évidemment $\beta_\omega(\tilde{U}_m^{(0)}, \tilde{U}_m^{(0)*}) = \int_\Sigma \int_\Sigma G(M; M', \omega) dM dM'$. Posons $\beta_\omega^{mm} = \beta(k)$, $k = \omega/c$, c célérité des ondes. On a

$$\beta(k) = - \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \frac{e^{ikr}}{2\pi r} dx dy dx' dy', \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Cherchons si il existe une ou plusieurs valeurs (ou aucune) de k qui annulent $\beta(k)$. Pour ce faire, nous allons chercher à utiliser les résultats sur la répartition des zéros des fonctions entières. Par deux changements de variables successifs, l'impédance de rayonnement de la membrane s'écrit

$$\begin{aligned} \beta(k) &= -\frac{2ab}{\pi} \int_0^a \int_0^b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{2ab}{\pi} \int_0^{\theta_\alpha} I_1(k, \theta) d\theta - \frac{2ab}{\pi} \int_{\theta_\alpha}^{\pi/2} I_2(k, \theta) d\theta, \end{aligned}$$

avec $\theta_\alpha = \arctan(b/a)$; $I_1(k, \theta)$ et $I_2(k, \theta)$ sont données par

$$\begin{aligned} I_1(k, \theta) &= \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} \left(1 - \frac{r \cos \theta}{a}\right) \left(1 - \frac{r \sin \theta}{b}\right) e^{ikr} dr = \frac{i}{k} + \frac{\cos \theta}{ak^2} + \frac{\sin \theta}{bk^2} - \frac{i \sin 2\theta}{abk^3} \\ &\quad + e^{i \frac{ak}{\cos \theta}} \left(\frac{\sin \theta}{bk^2} - \frac{\cos \theta}{ak^2} + \frac{i \sin 2\theta}{abk^3} \right) \\ I_2(k, \theta) &= \int_0^{\frac{b}{\sin \theta}} \left(1 - \frac{r \cos \theta}{a}\right) \left(1 - \frac{r \sin \theta}{b}\right) e^{ikr} dr = \frac{i}{k} + \frac{\cos \theta}{ak^2} + \frac{\sin \theta}{bk^2} - \frac{i \sin 2\theta}{abk^3} \\ &\quad + e^{i \frac{bk}{\sin \theta}} \left(\frac{\cos \theta}{ak^2} - \frac{\sin \theta}{bk^2} + \frac{i \sin 2\theta}{abk^3} \right) \end{aligned}$$

Comme on ne dispose pas de résultats analytiques simples pour les fonctions $\cos \theta \exp(\imath a k / \cos \theta)$ et $\sin \theta \exp(\imath b k / \sin \theta)$, on construit une approximation de $\beta(k)$ qui ne change pas fondamentalement sa dépendance par rapport à la fréquence. Comme θ_a est toujours compris entre 0 et $\pi/2$, on développe $I_1(k, \theta)$ et $I_2(k, \theta)$ en série de Taylor limitée à l'ordre 1 par rapport à θ au voisinage de $\theta = 0$ pour $I_1(k, \theta)$ et au voisinage de $\theta = \pi/2$ pour $I_2(k, \theta)$. On procède ensuite à l'intégration angulaire et on obtient une approximation analytique de l'impédance de rayonnement $\beta(k) \approx \check{\beta}$. On montre, en développant $\check{\beta}$ en série de Taylor par rapport à k , que l'on obtient une fonction entière du nombre d'onde k :

$$\check{\beta}(k) = -\frac{1}{4\pi k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{k^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$a_n = 4\theta_\alpha \left(-2b(\imath a)^{n+2} + (\imath b)^{n+2}(2a - b\pi) - \frac{2\imath(\imath b)^{n+3}\pi}{n+3} - \imath\theta_\alpha \frac{n+1}{n+3} \left((\imath a)^{n+3} + (\imath b)^{n+3} \right) \right) + \pi \left((\imath b)^{n+2}(-4a + b\pi) + \frac{2\imath(\imath b)^{n+3}\pi}{n+3} \right)$$

Or, on sait que l'ordre ρ d'une fonction entière est lié au comportement asymptotique des coefficients de son développement en série entière. Si le développement est donné par $\sum c_n z^n$ on a $1/\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (\ln(1/|c_n|)/(n \ln n))$ (Saks et Zygmund (1970)). On montre alors très simplement que l'ordre de la fonction $\check{\beta}(k)$ est $\rho = 1$.

En outre, la formule de Jensen (Saks et Zygmund (1970)) dit que si $n(r)$ est le nombre de zéros d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ contenus dans le cercle de rayon r centré à l'origine, alors on a $n(r) = \mathcal{O}(r^{\rho+\eta})$, $\eta > 0$. Une fonction entière d'ordre 1 possède une infinité de zéros ou aucun (comme par exemple la fonction $\exp(z)$ qui est d'ordre 1 et ne s'annule jamais). Ainsi, pour $|k|$ grand, l'impédance de rayonnement de la membrane possède soit une infinité de zéros soit aucun. Pour montrer que l'on a au moins un zéro (et donc une infinité), on peut appliquer le théorème de l'argument qui dit que si \mathcal{C} est un cercle de centre 0 et de rayon K et si $\beta(k)$ ne possède pas de pôles, alors le nombre de zéros $n(K)$ contenus dans ce disque fermé est donné par l'intégrale

$$n(K) = \frac{1}{2\imath\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\check{\beta}'(k)}{\check{\beta}(k)} dk, \text{ avec } k = Ke^{\imath\theta}$$

Par exemple, si on fixe $a = 1$, $b = 0,9$, on calcule numériquement l'intégrale précédente sur le cercle \mathcal{C} dont on fait varier le rayon K . On montre facilement que $n(8) = 0$, $n(9) = 2$, $n(20) = 4$ (les zéros arrivent par paires conjuguées). On a donc une infinité de résonances. Ainsi, le couplage avec un fluide de densité très élevée multiplie à l'infini les résonances de la membrane.

Le figure 2 présente les courbes de niveau pour l'impédance de rayonnement $\beta(k)$ et son approximation $\check{\beta}(k)$. Sur ces courbes, les tâches les plus sombres correspondent aux zéros de l'impédance de rayonnement. Il est évident au vu de ces résultats que l'approximation de l'impédance de rayonnement utilisée pour démontrer la multiplicité des résonances ne permet pas d'atteindre toutes les résonances. Néanmoins, lorsque l'on calcule les valeurs numériques des zéros, les deux premiers zéros de $\check{\beta}(k)$ sont donnés par $k_{0a} = 7,89 - \imath 2,78$ et $k_{0a} = 14,58 - \imath 3,62$ et les deux premiers zéros de $\beta(k)$ sont donnés par $k_{0e} = 7,25 - \imath 2,71$ et $k_{0e} = 13,55 - \imath 3,98$ ce qui montre que l'approximation est d'excellente qualité.

4 Conclusions

Le but de cet article était de démontrer que le couplage d'une structure vibrante avec un fluide de densité élevée transforme toute résonance simple de structure en une infinité de réso-

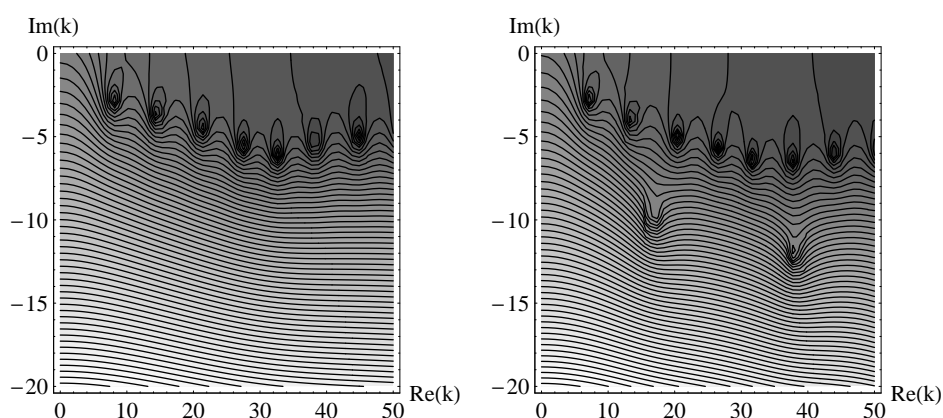


FIG. 2 – Courbes de niveau des impédances de rayonnement approchée $\check{\beta}(k)$ (gauche) et exacte $\beta(k)$ (droite)

nance. De fait ces résultats, si ils apportent des éléments de réponses, ouvrent aussi de nouvelles perspectives. En particulier, on aimerait disposer d'estimations similaires pour des modes vibratoires de plaque ou d'autre types de structures mécaniques. Cependant, il paraît peu probable que l'on puisse disposer d'estimation analytique de l'impédance de rayonnement. Un autre aspect est lié aux propriétés des fonctions entières, en particulier, le calcul des fréquences de résonances est équivalent à la recherche des zéros de la fonction $f(z) = z^2 - z^2 \epsilon \beta^{mm}(z) - z_0^2$, or, $f(z)$ est un polynôme en z lorsque $\epsilon = 0$ et est donc une fonction d'ordre zéro et, comme nous venons de le voir, $f(z)$ est une fonction d'ordre 1 pour $\epsilon = \infty$, et on aimerait savoir si $f(z)$ a une dépendance continue par rapport à ϵ . En effet, un théorème de Borel (Saks et Zygmund (1970)) dit qu'une fonction entière d'ordre fractionnaire possède une infinité de zéros. Auquel cas cela signifierait que tout couplage avec un fluide de densité non nulle multiplierait les résonances à l'infini (y compris en fluide léger). Le corollaire de cette question est de savoir sous quelles conditions les systèmes modérément couplés (comme une plaque en acier au contact d'eau) présentent cette propriété. Une autre perspective est liée à la mise au point d'une expérience qui permettrait de mettre en évidence ce phénomène.

Références

- O. Dazel, C.-H. Lamarque and F. Sgard 2004. Frequency non-linear modes. *In Proc. Euromech 457* (ed. S. Bellizzi et al) pp. 65-68, press of the ENTPE, Lyon.
- P.J.T. Filippi, D. Habault, P.-O. Mattei and C. Maury 2001. The rôle of the resonance modes in the response of a fluid-loaded structure. *Journal of Sound and Vibration*. **239**(4) 369-663
- P.-O. Mattei 2007. High-Order Perturbation Expansion for the Spectral Analysis of Fluid-Loaded Vibrating Structure. *Acta Acustica United with Acustica*. **À paraître**
- A.H. Nayfeh 1993. Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley & Sons, New-York.
- S. Saks et A. Zygmund 1970. Fonctions analytiques. Masson et Cie, Paris.